第４講　数　列

1　初項 a_1 が 1 であり，次の条件①，②によって定まる数列 $\{a_n\}$ を考えよう。

$a_{2n}=a_n$　　　　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　……………………………①

$a_{2n+1}=a_n+a_{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　……………………………②

(1)　①により $a_2=a_1$ となるので $a_2=1$ であり，②により $a_3=a_1+a_2$ となるので $a_3=2$ である。同様に

$a_4=$ **ア** ，$a_5=$ **イ** ，$a_6=$ **ウ** ，$a_7=$ **エ**

である。

また，a_{18} については，$a_{18}=a_9$ により $a_{18}=$ **オ** であり，a_{38} については，$a_{38}=a_{19}=a_9+a_{10}$ により $a_{38}=$ **カ** である。

(2)　k を自然数とする。①により $\{a_n\}$ の第 $3\cdot 2^k$ 項は **キ** である。

（次ページに続く。）

(3)　数列 $\{a_n\}$ の第 3 項以降を次のように群に分ける。ただし，第 k 群は 2^k 個の項からなるものとする。

第 1 群	第 2 群	第 3 群	
a_3，a_4	a_5，a_6，a_7，a_8	a_9，…，a_{16}	a_{17}，…

2 以上の自然数 k に対して，$\sum_{j=1}^{k-1} 2^j = \boxed{クケ} - \boxed{コ}$ なので，第 k 群の最初の項は，$\{a_n\}$ の第 $\left(\boxed{ク}^{\boxed{ケ}} + \boxed{サ}\right)$ 項であり，第 k 群の最後の項は，$\{a_n\}$ の第 $\boxed{ク}^{\boxed{シ}}$ 項である。ただし，$\boxed{ケ}$，$\boxed{シ}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。同じものを選んでもよい。

⓪　$k-2$　　①　$k-1$　　②　k　　③　$k+1$　　④　$k+2$

第 k 群に含まれるすべての項の和を S_k，第 k 群に含まれるすべての奇数番目の項の和を T_k，第 k 群に含まれるすべての偶数番目の項の和を U_k とする。たとえば

$S_1 = a_3 + a_4$，　$T_1 = a_3$，　$U_1 = a_4$

$S_2 = a_5 + a_6 + a_7 + a_8$，　$T_2 = a_5 + a_7$，　$U_2 = a_6 + a_8$

であり

$S_1 = \boxed{ス}$，　$S_2 = \boxed{セ}$，　$T_2 = \boxed{ソ}$，　$U_2 = \boxed{タ}$

である。

（次ページに続く。）

(4)　(3)で定めた数列 $\{S_k\}$，$\{T_k\}$，$\{U_k\}$ の一般項をそれぞれ求めよう。

①により $U_{k+1}=$ **チ** となる。また，$\{a_n\}$ の第 2^k 項と第 2^{k+1} 項が等しいことを用いると，②により $T_{k+1}=$ **ツ** となる。したがって，$S_{k+1}=T_{k+1}+U_{k+1}$ を用いると，$S_{k+1}=$ **テ** となる。**チ**，**ツ**，**テ** に当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　S_k　　①　S_k+3k　　②　T_k

③　U_k　　④　$2S_k$　　⑤　$2T_k$

⑥　$2T_k+2k-1$　　⑦　$2T_k+k(k+1)$　　⑧　$3S_k$

⑨　$3S_k+(k-1)(k-2)$

（次ページに続く。）

以上のことから

$S_k=$ [ト]，$T_k=$ [ナ]，$U_k=$ [ニ]

である。[ト]，[ナ]，[ニ] に当てはまるものを，次の⓪～ⓑのうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $2k^2-4k+3$	① 3^{k-1}
② $2^{k+1}-2k-1$	③ $2^{k+2}-2k^2-5$
④ $4k^2-8k+6$	⑤ $2\cdot3^{k-1}$
⑥ $2^{k+2}-4k-2$	⑦ $2^{k+3}-4k^2-10$
⑧ $6k^2-12k+9$	⑨ 3^k
ⓐ $3\cdot2^{k+1}-6k-3$	ⓑ $3\cdot2^{k+2}-6k^2-15$

2

〔1〕 自然数 n に対して，$S_n=5^n-1$ とする。さらに，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が S_n であるとする。このとき，$a_1=$ ア である。また，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=\boxed{\text{イ}}\cdot\boxed{\text{ウ}}^{\,n-1}$$

である。この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

上で求めたことから，すべての自然数 n に対して

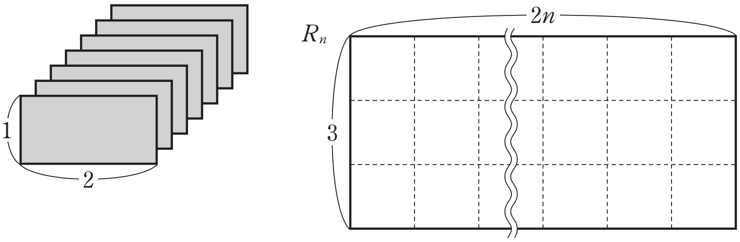
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}\left(1-\boxed{\text{キ}}^{\,-n}\right)$$

が成り立つことがわかる。

（次ページに続く。）

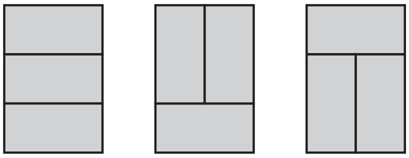
〔２〕 太郎さんは和室の畳を見て，畳の敷き方が何通りあるかに興味を持った。ちょうど手元にタイルがあったので，畳をタイルに置き換えて，数学的に考えることにした。

縦の長さが１，横の長さが２の長方形のタイルが多数ある。それらを縦か横の向きに，隙間も重なりもなく敷き詰めるとき，その敷き詰め方をタイルの「配置」と呼ぶ。

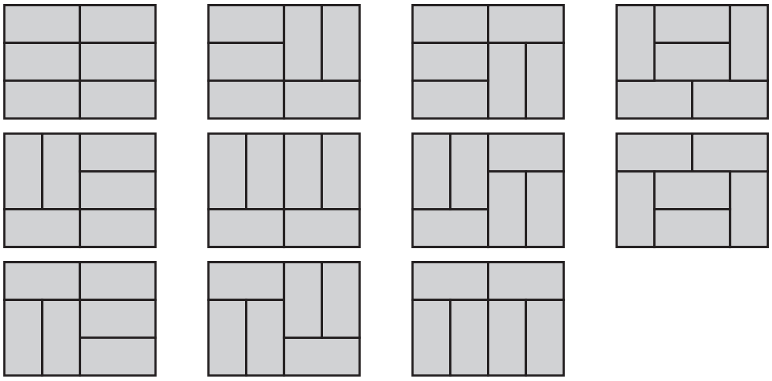


上の図のように，縦の長さが３，横の長さが $2n$ の長方形を R_n とする。$3n$ 枚のタイルを用いた R_n 内の配置の総数を r_n とする。

$n=1$ のときは，下の図のように $r_1=3$ である。

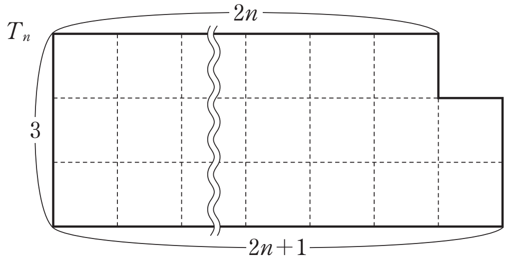


また，$n=2$ のときは，下の図のように $r_2=11$ である。



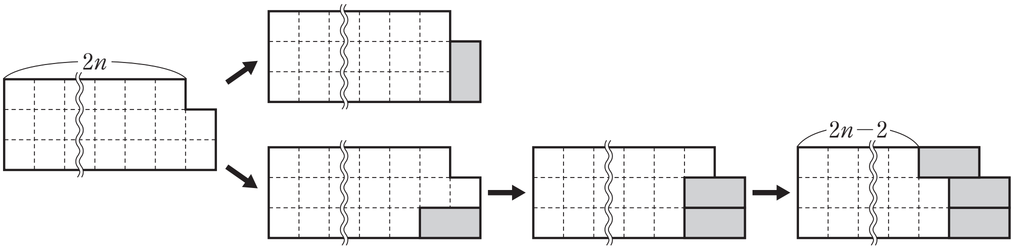
（次ページに続く。）

(1)　太郎さんは次のような図形 T_n 内の配置を考えた。



$(3n+1)$ 枚のタイルを用いた T_n 内の配置の総数を t_n とする。$n=1$ のときは，$t_1=$ **ク** である。

さらに，太郎さんは T_n 内の配置について，右下隅(すみ)のタイルに注目して次のような図をかいて考えた。



この図から，2 以上の自然数 n に対して

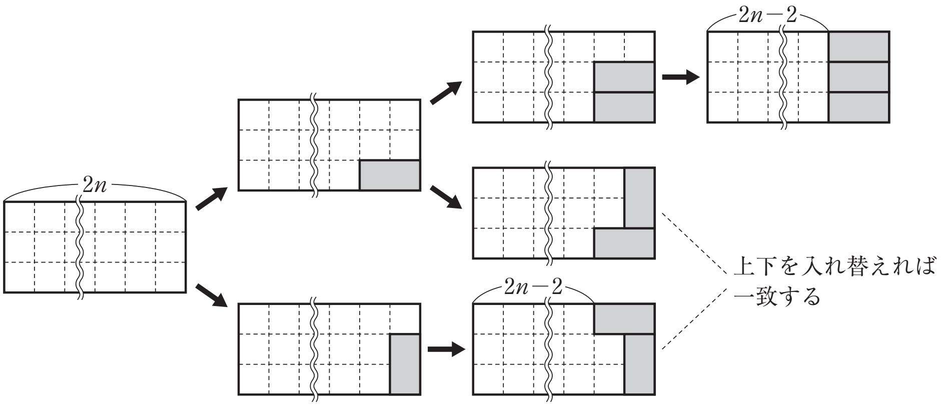
$$t_n=Ar_n+Bt_{n-1}$$

が成り立つことがわかる。ただし，$A=$ **ケ**，$B=$ **コ** である。

以上から，$t_2=$ **サシ** であることがわかる。

（次ページに続く。）

同様に，R_n の右下隅のタイルに注目して次のような図をかいて考えた。



この図から，2 以上の自然数 n に対して

$$r_n = Cr_{n-1} + Dt_{n-1}$$

が成り立つことがわかる。ただし，$C=$ **ス** ，$D=$ **セ** である。

(2)　畳を縦の長さが 1，横の長さが 2 の長方形とみなす。縦の長さが 3，横の長さが 6 の長方形の部屋に畳を敷き詰めるとき，敷き詰め方の総数は **ソタ** である。

また，縦の長さが 3，横の長さが 8 の長方形の部屋に畳を敷き詰めるとき，敷き詰め方の総数は **チツテ** である。

第4講　数　列

[1] $a_1=1$

$a_{2n}=a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ ……①

$a_{2n+1}=a_n+a_{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ ……②

(1) ①で $n=1$ のとき，$a_2=a_1=1$

②で $n=1$ のとき，$a_3=a_1+a_2=1+1=2$

①で $n=2$ のとき，$a_4=a_2=1$

②で $n=2$ のとき，$a_5=a_2+a_3=1+2=3$

①で $n=3$ のとき，$a_6=a_3=2$

②で $n=3$ のとき，$a_7=a_3+a_4=2+1=3$

また，$a_{18}=a_9=a_4+a_5=1+3=4$

$a_{38}=a_{19}=a_9+a_{10}=a_9+a_5=4+3=7$

(2) $a_{3\cdot 2^k}=a_{3\cdot 2^{k-1}}=a_{3\cdot 2^{k-2}}=\cdots\cdots=a_{3\cdot 2}=a_3=2$

(3) 2以上の自然数 k に対して

$$\sum_{j=1}^{k-1}2^j=\frac{2(2^{k-1}-1)}{2-1}=2^k-2 \ (②)$$

よって，第 $(k-1)$ 群の最後の項までに (2^k-2) 個の項が存在し，また数列 $\{a_n\}$ の第3項以降を群に分けていることから，第 k 群の最初の項は，数列 $\{a_n\}$ の第 $[2+\{(2^k-2)+1\}]$ 項，すなわち第 (2^k+1) 項である。また，第 k 群の最後の項は，数列 $\{a_n\}$ の第 $\{2+(2^{k+1}-2)\}$ 項，すなわち第 2^{k+1} 項（③）である。

$S_1=a_3+a_4=2+1=3$

$S_2=a_5+a_6+a_7+a_8=a_5+a_6+a_7+a_4=3+2+3+1=9$

$T_2=a_5+a_7=3+3=6$

$U_2=a_6+a_8=2+1=3$

(4) (3)より，第 $(k+1)$ 群の最初の項は $a_{2^{k+1}+1}$，最後の項は $a_{2^{k+2}}$ である。

$$a_{2^{k+1}+1},\ a_{2^{k+1}+2},\ a_{2^{k+1}+3},\ \cdots\cdots,\ a_{2^{k+2}-1},\ a_{2^{k+2}}$$

よって，①により

$$\begin{aligned}U_{k+1}&=a_{2^{k+1}+2}+a_{2^{k+1}+4}+\cdots\cdots+a_{2^{k+2}}\\&=a_{2(2^k+1)}+a_{2(2^k+2)}+\cdots\cdots+a_{2\cdot 2^{k+1}}\\&=a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots\cdots+a_{2^{k+1}}=S_k \ (⓪)\end{aligned}$$

$(U_2=a_6+a_8=a_3+a_4=S_1)$

また，$a_{2^k}=a_{2^{k+1}}$ であることを用いると，②により

$$\begin{aligned}T_{k+1}&=a_{2^{k+1}+1}+a_{2^{k+1}+3}+a_{2^{k+1}+5}+\cdots\cdots+a_{2^{k+2}-1}\\&=(a_{2^k}+a_{2^k+1})+(a_{2^k+1}+a_{2^k+2})+(a_{2^k+2}+a_{2^k+3})+\cdots\cdots+(a_{2^{k+1}-1}+a_{2^{k+1}})\\&=(a_{2^{k+1}}+a_{2^k+1})+(a_{2^k+1}+a_{2^k+2})+(a_{2^k+2}+a_{2^k+3})+\cdots\cdots+(a_{2^{k+1}-1}+a_{2^{k+1}})\\&=2(a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+a_{2^k+3}+\cdots\cdots+a_{2^{k+1}})=2S_k \ (④)\end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned}T_3&=a_9+a_{11}+a_{13}+a_{15}\\&=(a_4+a_5)+(a_5+a_6)+(a_6+a_7)+(a_7+a_8)\\&=(a_8+a_5)+(a_5+a_6)+(a_6+a_7)+(a_7+a_8)\\&=2(a_5+a_6+a_7+a_8)=2S_2\end{aligned}\right)$$

したがって，

$S_{k+1}=T_{k+1}+U_{k+1}=2S_k+S_k=3S_k$（⑧）

となる。よって，数列 $\{S_k\}$ は初項 $S_1=3$，公比 3 の等比数列であるから，

$S_k=3\cdot3^{k-1}=3^k$（⑨）

$T_{k+1}=2S_k=2\cdot3^k$ より，$T_k=2\cdot3^{k-1}$（$k=1$ のときも成立）（⑤）

$U_{k+1}=S_k=3^k$ より，$U_k=3^{k-1}$（$k=1$ のときも成立）（①）

[2]〔１〕　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=5^n-1$ で表されるとき

$a_1=S_1=5^1-1=4$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}=(5^n-1)-(5^{n-1}-1)=5\cdot5^{n-1}-1\cdot5^{n-1}=(5-1)\cdot5^{n-1}=4\cdot5^{n-1}$

この式で $n=1$ のとき，$4\cdot5^0=4$ となり a_1 と一致する。

したがって，$a_n=4\cdot5^{n-1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

このとき，$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{4\cdot5^{n-1}}=\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$ より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{16}(1-5^{-n})$$

〔２〕　R_n および r_n について

$n=1$ のとき

図形 R_1 は縦の長さが 3，横の長さが 2 の長方形であり，3 枚のタイルを用いた図形 R_1 内の配置の総数は $r_1=3$ である。

$n=2$ のとき

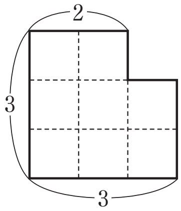
図形 R_2 は縦の長さが 3，横の長さが 4 の長方形であり，6 枚のタイルを用いた図形 R_2 内の配置の総数は $r_2=11$ である。

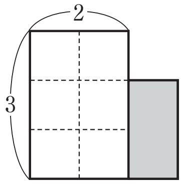
(1)　T_n および t_n について

$n=1$ のとき

図形 T_1 は図 1 である。4 枚のタイルを用いた図形 T_1 内の配置の総数 t_1 について考える。

図 1　　図 2　　図 3　　図 4





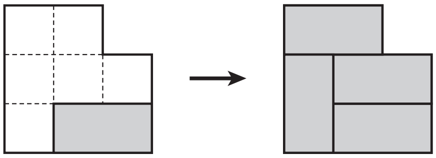


図 2 のように 1 枚のタイルを敷き詰めたとすると，図形 T_1 の残りの部分は図形 R_1 であり，残り 3 枚のタイルを用いた配置の総数は r_1 すなわち 3 通りである。

図 3 のように 1 枚のタイルを敷き詰めたとすると，残りの 3 枚のタイルを用いた配置は図 4 の 1 通りである。

よって，$t_1=3+1=4$

図形 T_n について

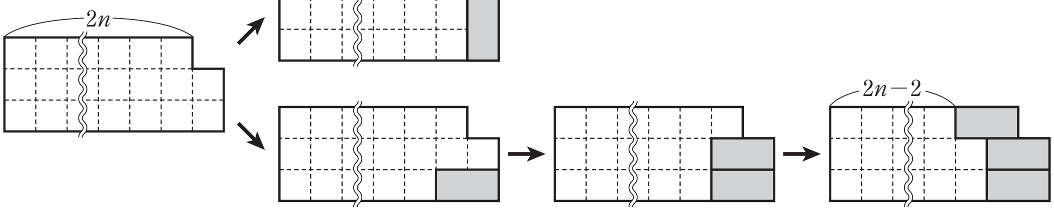


図 5　図 6　図 7　図 8

図形 T_n の右下隅のタイルに注目すると，図 5 または図 6 の 2 通りの敷き方があり，この 2 通りですべてである。

図 5 のように 1 枚のタイルを敷き詰めたとすると，図形 T_n の残りの部分は図形 R_n であり，残り $3n$ 枚のタイルを用いた配置の総数は r_n 通りである。

図 6・図 7・図 8 のようにタイルを 1 枚ずつ，計 3 枚敷いたとすると，図 8 において図形 T_n の残りの部分は図形 T_{n-1} であり，残り $(3n-2)$ 枚，すなわち $\{3(n-1)+1\}$ 枚のタイルを用いた配置の総数は t_{n-1} 通りである。

よって，2 以上の自然数 n に対して，$t_n=1\times r_n+1\times t_{n-1}=r_n+t_{n-1}$ が成り立つ。

以上より，$t_2=r_2+t_1=11+4=15$ であることがわかる。

図形 R_n において，右下隅のタイルに注目する

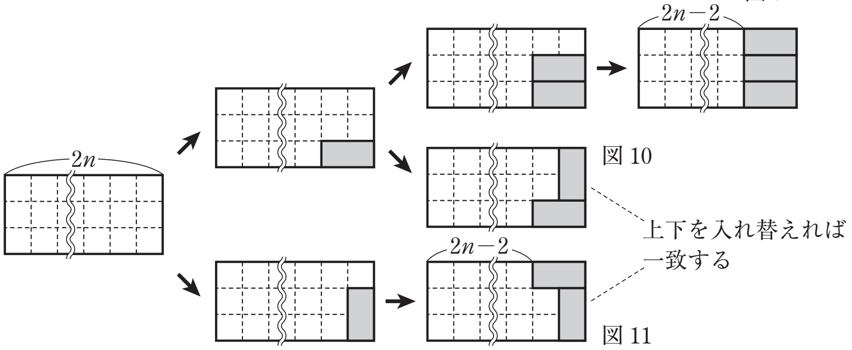


図 9　図 10　図 11

図 9〜11 のようにタイルを敷いた後の R_n の残りの部分について

図 9 は図 R_{n-1} であり，残りのタイルの配置の総数は r_{n-1} 通り

図 10，図 11 は図 T_{n-1} であり，残りのタイルの配置の総数は t_{n-1} 通り

である。よって，2 以上の自然数 n に対して，$r_n=r_{n-1}+2t_{n-1}$ が成り立つ。

(2)　畳を縦の長さが 1，横の長さが 2 の長方形とみなすとき，縦の長さが 3，横の長さが 6 の長方形の部屋における畳の敷き詰め方の総数は，図形 R_3 内のタイルの配置の総数であり

$r_3=r_2+2t_2=11+2\cdot15=41$

である。

また，縦の長さが 3，横の長さが 8 の長方形の部屋における畳の敷き詰め方の総数は，図形 R_4 内のタイルの配置の総数であり

$r_4=r_3+2t_3=r_3+2(r_3+t_2)=3r_3+2t_2=3\cdot41+2\cdot15=153$

である。